Version - 16.04.2009 20:00 Uhr

Gedanken zum 3-Züge-Gesetz von Oskar Cordel

Ingo Althöfer, Fakultät für Mathematik und Informatik
Friedrich-Schiller-Universität Jena, 07737 Jena

Email: 3-hirn-verlag@gmx.de

Kurzinhalt

Am Ende seines Lebens formulierte der Schachmeister und Schachtheoretiker Oskar Cordel ein **Dreizügegesetz**: In jeder Schachstellung gebe es entweder einen eindeutig besten Zug oder mindestens drei Züge von annähernd gleicher Güte.
In dieser Allgemeinheit kann die Aussage nicht richtig sein. Wir beleuchten verschiedene Aspekte der Behauptung und glauben, dass zwei abgeschwächte Versionen des **3-Züge-Gesetzes** beim Schachspiel gelten:

(i) Es ist **relativ selten**, dass in einer Schach-Stellung genau zwei beste Züge vorliegen.

(ii) Der **durchschnittliche Abstand** zwischen bestem und zweitbestem Zug in einer Stellung ist größer als der zwischen zweitbestem und drittbestem Zug.

1. Einleitung

Oskar Cordel (1843-1913) war ein Schachmeister und hat auch viele wichtige Beiträge zur Eröffnungstheorie geliefert. So ist nach ihm die Eröffnung 1.e4 e5 2.Sf3 Sc6 3.Lb5 Lc5 als die Cordelvariante im Spanier benannt (hat ein ganzes Kapitel in der Enzyklopädie der Schacheröffnungen: C 64). Erst kurz nach seinem Tod erschien sein Buch "Theorie und Praxis des Schachspiels" [Cor 1913].
Auf der vorletzten Seite (S.302) von Band II steht darin wörtlich

"An dieser Stelle sei folgendes bemerkt: Auf Grund jahrelanger Forschungen stellte Cordel folgendes, wie er es nannte: "Dreizügegesetz", auf. In einer beliebigen Position gibt es entweder nur einen, besten Zwangszug, oder aber drei etwas gleichwertige Züge. Dieses Gesetz, so lehrte er, übe eine vorzügliche Kontrolle aus über die Richtigkeit irgend einer Wendung im Schachspiel. Es habe für ihn namentlich da Klarheit geschaffen, wo in den Lehrbüchern steht, daß die Untersuchungen noch nicht abgeschlossen seien, wie im Evansgambit, Giuoco piano, Englischen Springerspiel u. dgl. mehr. Lagen zwei anscheinend etwa gleichwertige Fortsetzungen vor, so war er davon überzeugt, dass entweder eine falsch, oder noch eine dritte vorhanden

sein müsse, und er ließ dann nicht locker, bis Klarheit geschaffen war. Die Vorarbeiten für ein Buch über dies "Dreizügegesetz" waren bereits weit vorgeschritten. Auch hier hat ihm der Tod die Feder aus der Hand genommen." Ende des Zitates.
Wer sich darüber wundert, dass hier vom Autor in der dritten Person ("Cordel") geschrieben ist, findet eine Erklärung auf S. 303 (letzte Seite). Dort steht, hier wieder wörtlich zitiert:

"Schlußwort
Oskar Cordel hat die Fertigstellung dieses seines letzten Werkes nicht mehr erlebt, denn er ist am 13. Mai d. J. (1913) gestorben. Der Unterzeichnete hat es übernommen, das Werk zu ende zu führen und die für die letzte Lieferung noch fehlenden Partien bereitzustellen. Er hat sich bei der Anordnung des Stoffes an die Grundsätze Cordels auch dann gehalten, wenn er sie nicht teilt, und er entläßt diese Schlußlieferung mit dem Wunsche, daß das ganze Werk eine wohlwollende Aufnahme finden und allen, die sich ihm anvertrauen, viel Anregung, Belehrung und Freude bereiten, zugleich auch die Erinnerung an seinen Schöpfer lebendig erhalten möge.
Allen, die ihre Zeit und Erfahrung auch dem zweiten Bande des Werkes zugute kommen lassen, insbesondere den Herren Hülsen, Kunze und Keiner sei auch an dieser Stelle gedankt.
Berlin W. 30, im August 1913.
H. Ranneforth."   Ende des Zitates.

In einer Email [And 2009a] teilte mir der Schachhistoriker Peter Anderberg freundlicherweise weitere Details mit, die die Aussage im Zitat von S. 303 etwas relativieren. Unter anderem schrieb Anderberg:

"Aus der Rezension von Theorie und Praxis im Deutschen Wochenschach 1913, S. 339, geht hervor, dass die Schlussbemerkungen auf S. 302 weder von O. Cordel, noch von H. Ranneforth, sondern von Bernhard Hülsen stammen." [Anmerkung: Hülsen war nicht nur ein starker Schachspieler, sondern auch ein produktiver Problemkomponist.]

Zunächst hat mich eine Ungenauigkeit bei der Formulierung des 3-Züge-Gesetzes in Cordels Buch gestört. Klarer hätte es heißen können:

> **(a) "Es gibt keine Positionen mit genau zwei gleichguten besten Zügen."**

oder

> (b) **"In einer beliebigen Position gibt es entweder einen eindeutig besten Zug, oder die drei besten Züge sind ungefähr gleichgut."**

Insbesondere schließen sowohl (a) als auch (b) nicht aus, dass ein vierter oder auch fünfter Zug von vergleichbar bester Qualität da sein kann.

Das 3-Züge-Gesetz von Cordel kann natürlich nicht wahr sein, weil es offensichtlich Stellungen mit zwei besten Zügen gibt. Einfache Beispiele sind Positionen, bei denen die Partei, die am Zug ist, auf genau zwei verschiedene Weisen in einem Zug mattsetzen kann.

Natürlich könnte man als Reparaturversuch sagen, die Regel gelte nur dann, wenn es keine offensichtlichen Stellungs-Besonderheiten gebe, doch so etwas wäre keine befriedigende Rettung des 3-Züge-Gesetzes.

In den folgenden Abschnitten diskutieren wir verschiedene Aspekte des 3-Züge-Gesetzes. Dabei kommen wir zu dem Schluss, dass es in relativierter Form durchaus richtig ist. Mit "relativ" meinen wir, dass es zwar sehr wohl "Stellungen mit genau zwei stärksten Zügen" gibt, dass aber solche Stellungen nur selten vorkommen - selten im Vergleich zum Vorkommen von Stellungen mit genau einem besten Zug oder mit mindestens drei besten Zügen.

****

In Abschnitt 2 betrachten wir Statistiken für Endspiele, die vollständig analysiert worden sind. Um diese geht es auch noch in Abschnitt 3, dort aber in der verfeinerten Betrachtung, dass die Zügezahl bis zum Matt berücksichtigt wird. Ein ganz pragmatischer Aspekt der Schachprogrammierung wird in Abschnitt 4 vorgestellt. Löst man sich vom Schach und betrachtet auch andere Spiele, findet man solche, bei denen das 3-Züge-Gesetz von Cordel in Perfektion gilt, zum Beispiel das in Abschnitt 5 diskutierte NIM-Spiel.

Welche Rolle Tarrasch mit seiner Philosophie des "oft eindeutigen besten Zuges" und Zermelo mit seiner bahnbrechenden mathematischen Analyse von 1912 (gedruckt 1913 als [Zer 1913]) vielleicht spielten, beleuchtet Abschnitt 6. Ein exemplarischer Ausblick auf einige obskur anmutende Zahlengesetze in verschiedenen Naturwissenschaften (Astronomie, Biologie, Kernphysik) wird in Abschnitt 7 gewährt. Dieser Blick über den Zaun soll helfen, den Drang von Menschen nach einfachen Zahlengesetzen als normal zu erkennen: es gibt ihn nicht nur in der Schachwelt. Abschnitt 8 enthält offene Fragen und eine Schlußdiskussion, unter anderem darüber, in welchen Bereichen des (Schach-)Spiels man mit heutigen Mitteln weitere Indizien für relativierte 3-Züge-Gesetze finden könnte.

2. Indizien für ein relatives 3-Züge-Gesetz in Schach-Endspielen (mit Eiko Bleicher)

Schach-Endspiele mit wenigen Figuren lassen sich vollständig durchrechnen. Die Zahl der Stellungen ist zwar groß, aber die heutigen Computer sind auch schnell. So hat Eugene Nalimov es in einem Kraftakt geschafft, alle 6-Steiner (also alle Endspiele, bei denen Weiß und Schwarz zusammen 6 Spielfiguren auf dem Brett haben) durchzurechnen und die sich ergebenden Datenbanken der Allgemeinheit zur Verfügung zu stellen.

Bei dem vollständigen Durchrechnen solcher Endspiele geht es nicht nur um die Frage, ob eine Stellung gewonnen oder unentschieden ist, sondern auch darum, wie viel Züge bis zum Sieg es dauert, wenn die stärkere Partei diesen möglichst schnell herbeiführen und die Gegenseite ihn möglichst lange hinauszögern will.

Eiko Bleicher stellt die Inhalte der Nalimov-Datenbanken auf seiner Webseite [Ble 2005++] der Allgemeinheit zur Verfügung. Auf der Seite kann man eine beliebige Stellung mit höchstens 6 Steinen eingeben, und sofort sagt die Datenbank, welcher der legalen Züge zum Sieg, zu einem Unentschieden oder zur Niederlage führt. Eiko Bleicher hat viele Endspiele aus der Datenbank statistisch ausgewertet: er hat gezählt, in wie viel Stellungen es einen, zwei oder mindestens drei Siegzüge gibt; und in wie viel Remisstellungen es einen oder zwei oder mindestens drei Züge gibt, die das Remis sichern. Exemplarisch sind hier die Ergebnisse für zwei der Endspiele aufgelistet.

*** Das Beispiel König + Dame vs. König + Turm**
Typischerweise gewinnt die Partei mit der Dame. Es gibt Stellungen, bei denen bis zum Sieg 34 Züge benötigt werden, wenn beide Parteien bestmöglich spielen und der Spieler mit dem Turm beginnt (z.B. Ka1,Da3 vs. Kd5,Td4). Bleichers Statistik zeigt:

Anzahl der Stellungen mit der Damenseite am Zug:
Siegstellungen mit genau einem Siegzug= 36.782
Siegstellungen mit genau zwei Siegzügen= 21.565
Siegstellungen mit mindestens drei Siegzügen= 1.066.415

*** Das Beispiel König + Turm vs. König + 3 Bauern**
Weiß hat König und Turm, Schwarz den König und drei Bauern.
Die Besonderheit bei diesem Endspiel ist, dass es wegen der großen Unsymmetrie des Materials viele Stellungen gibt, die für die Turmseite gewonnen sind, aber auch viele Stellungen, wo die Partei mit den Bauern den Sieg erzwingen kann.

Anteile bei den Stellungen, bei denen die Turmseite am Zug ist:
Siegstellungen mit genau einem Siegzug = 8,75 %
Siegstellungen mit genau zwei Siegzügen = 5,74 %
Siegstellungen mit mindestens drei Siegzügen = 42,63 %

Remisstellungen mit genau einem Remiszug = 5,42 %
Remisstellungen mit genau zwei Remiszügen = 3,16 %
Remisstellungen mit mindestens drei Remiszügen=13,36 %

Anteile bei den Stellungen, bei denen die Bauernseite am Zug ist:
Siegstellungen mit genau einem Siegzug = 15,36 %
Siegstellungen mit genau zwei Siegzügen = 9,17 %
Siegstellungen mit mindestens drei Siegzügen = 30,57 %

Remisstellungen mit genau einem Remiszug = 3,10 %
Remisstellungen mit genau zwei Remiszügen = 2,51 %
Remisstellungen mit mindestens drei Remiszügen=11,54 %

In allen fünf Fällen (einer bei KD-KT; vier bei KT-KBBB) sind die Stellungen mit zwei besten Zügen der kleinste der drei Posten. Es verhält sich also alles so, wie es ein relatives 3-Züge-Gesetz vorhersagt. Diese Beispieldaten sind übrigens Teil einer größeren Statistik-Auswertung, aus der ein Artikel (gemeinsam mit Eiko Bleicher) für das ICGA-Journal entstehen soll [AB 2009].

3. Verallgemeinerung des 3-Züge-Gesetzes auf Zuglängen mit Anwendung auf Schach-Endspiele (mit Eiko Bleicher)

Die folgende Aussage ist eine verschärfte Form des ursprünglichen 3-Züge-Gesetzes von Cordel.

(A) "Der Abstand zwischen bestem und zweitbestem Zug ist mindestens so groß wie der Abstand zwischen zweitbestem und drittbestem Zug."

Warum ist es eine Verschärfung? Angenommen, in einer Stellung sind bester und zweitbester Zug gleichgut (also Abstand = 0) und Aussage (A) gilt. Dann müssen auch zweitbester und drittbester Zug Abstand 0 haben. Damit hätten aber auch bester und drittbester Zug Abstand 0 - und es gäbe den Fall, dass genau zwei Züge optimal sind, nicht.

Natürlich gilt (A) nicht. Es könnte jedoch eine zugehörige Durchschnittsaussage (A’) richtig sein. Um diese formulieren zu können, bezeichnen wir den Qualitätsunterschied zwischen zwei Zügen als ihren „Abstand“. Dann lautet (A’)

(A') Der durchschnittliche Abstand zwischen bestem und zweitbestem Zug ist größer als der durchschnittliche Abstand zwischen zweitbestem und drittbestem Zug.

Bei vollständig analysierten Endspielen läßt sich der Wert einer Stellung beschrieben als die Länge bis zum Matt, wenn beide Seiten optimal spielen. Daraus ergibt sich der Wert eines Zuges als der Wert der Stellung, in die er führt. Der Abstand zwischen zwei Zügen (für die gleiche Stellung) sei dann die Differenz ihrer Werte.

Gibt es in einer Stellung mindestens drei Siegzüge, so definieren wir
delta_1 = Abstand zwischen bestem und zweitbestem Zug,
delta_2 = Abstand zwischen bestem und drittbestem Zug.

Fiktives Beispiel:
Da6 sei bester Zug und führe zum Sieg in 13 Zügen,
Db5 als zweitbester Zug führe zum Sieg in 18 Zügen,
Dc2 als drittbester Zug führe zum Sieg in 18 Zügen.
Dann ist für diese Stellung delta_1 = 18-13 = 5 und
delta_2 = 18-18 = 0.

Analog lassen sich delta_1 und delta_2 für Verluststellungen definieren, in denen es mindestens drei legale Züge gibt.

Auch hier wieder ein fiktives Beispiel:
Tc2 sei bester Zug und führe zum Verlust in 19 Zügen,
Tc6 als zweitbester Zug führe zum Verlust in 17 Zügen,
Kd5 als drittbester Zug führe zum Velust in 14 Zügen.
Dann ist für diese Stellung delta_1 = 19-17 = 2 und
delta_2 = 17-14 = 3.

Wir betrachten im folgenden beispielhaft wieder die beiden Endspiele König+Dame vs. König+Turm (KD-KT) und König+Turm vs. König+3 Bauern (KT-KBBB). Bleichers Analyse hat ergeben:

Daten für KD-KT

Hier gibt es für die Damenseite am Zug 1.066.415 Stellungen, für die es mindestens 3 Gewinnzüge gibt. Summiert man die Delta-Werte über all diese Stellungen auf, ergibt sich

Summe der delta_1= 5.162.001,
Summe der delta_2= 2.553.634.

Im Durchschnitt ist also der Abstand zwischen bestem und zweitbestem Zug etwa doppelt so groß wie der Abstand zwischen zweitbestem und drittbestem Zug.

Für die Turmseite am Zug gibt es 863.224 Verluststellungen, mit mindestens 3 legalen Zügen. Addition der Delta-Werte ergibt hier

Summe der delta_1= 1.824.011
Summe der delta_2= 1.674.734

Also ist auch hier der durchschnittliche Abstand zwischen bestem und zweitbestem Zug größer als der zwischen zweitbestem und drittbestem Zug. (Allerdings ist der Unterschied nicht so deutlich wie bei den Zügen für die Damenseite.)

Daten für KT-KBBB

Zu unterscheiden sind hier 4 Fälle:
(a1) Turmseite am Zug und mindestens drei Siegzüge
(a2) Bauernseite am Zug, Verluststellung mit mindestens drei legalen Zügen

(b1) Bauernseite am Zug und mindestens drei Siegzüge
(b2) Turmseite am Zug, Verluststellung mit mindestens drei legalen Zügen.

Es ergeben sich folgende Anzahlen und Summen:

zu (a1)
Anzahl Stellungen= 574.003.587
Summe der delta_1= 836.358.800
Summe der delta_2= 535.328.691

zu (a2)
Anzahl Stellungen= 415.610.922
Summe der delta_1= 436.453.321
Summe der delta_2= 335.757.661

zu (b1)
Anzahl Stellungen= 457.764.063
Summe der delta_1= 1.558.046.924
Summe der delta_2= 1.348.394.172

zu (b2)
Anzahl Stellungen= 282.123.904
Summe der delta_1= 704.093.524
Summe der delta_2= 399.776.256

In allen vier Fällen ist die Delta_1-Summe also deutlich größer als die zugehörige Delta_2-Summe. Dabei fällt auch auf, dass die Unterschiede bei Siegstellungen für die Turmseite klarer sind als bei der Bauernseite. Woher dieses Phänomen kommt, ist mir im Moment noch nicht klar.

Kleiner Exkurs: Ein Modell aus der Mathematik
(Der Abschnitt kann von Nichtmathematikern übersprungen werden.)

Es ist nicht überraschend, daß im Durchschnitt beste und zweitbeste Lösung weiter auseinander liegen als zweitbeste und drittbeste Lösung. Man stelle sich folgendes elementare Modell aus der Stochastik vor:
Gegeben sind n Zufallszahlen x_1, x_2, ..., x_n vor, die unabhängig voneinander gemäß einer Normalverteilung (mit identischen Mittelwerten und identischen positiven Varaianzen) erzeugt wurden. Sortiert man sie nach Grösse, ergibt sich eine Folge

$$(x[1], x[2], ..., x[n]) \text{ mit } x[1] > x[2] > ... > x[n].$$

Dabei kann an einigen der Stellen statt eines echten ">" auch ein "=" stehen. Dann läßt sich beweisen, daß für alle n > 3 für die Erwartungswerte der Differenzen gilt:

$$E(x[1] - x[2]) > E(x[2] - x[3]).$$

Im Durchschnitt liegen also größtes und zweitgrößtes Element der normalverteilten Zufallszahlen weiter auseinander als zweitgrößtes und drittgrößtes Element. Zu beachten ist, dass dieses wieder „nur" eine Aussage für die Erwartungswerte ist, denn natürlich kann es Realisierungen geben, bei denen $x[1]-x[2] < x[2]-x[3]$ ist.

4. Indizien in Schachprogrammen

Dr. Christian Donninger hat mich auf das starke Schachprogramm Fruit von Fabien Letouzey hingewiesen, was als Freeware-Programm in den Jahren 2004 und 2005 die Computerschach-Szene revolutionierte (auch das Programm Rybka wäre ohne Fruit wohl nicht entstanden). Fruit hat folgendes Schema für die Baumsuche populär gemacht: In einer Iteration des „Iterative Deepening" werden **die ersten 3 Zugkandidaten** mit voller Tiefe gesucht, die restlichen um einen Halbzug reduziert. Fruit kam (und kommt) auf diese Weise auf seine spektakulären Suchtiefen. (Im Programm Hydra, bei dem Donninger – zusammen mit Dr. Ulf Lorenz – der führende Kopf war, wurde eine Variante des Fruit-Schemas praktiziert: die ersten fünf Kandidaten wurden voll gesucht, und der Rest um einen halben Halbzug weniger. Donninger schrieb aber auch dazu: „Das konnte man einstellen. War nicht in Stein gemeiselt.")

In den Programmen Deep Thought (Ende der 1980er Jahre) und Deep Blue (1995-1997) wurden **Singular Extensions** gemacht: Gab es nach Meinung des Programms in einer Stellung **einen eindeutig besten Zug**, wurde hier tiefer gesucht. Das könnte man dann als eine Art Tarrasch-Schema (siehe Abschnitt 6) ansehen.

Ich gehe davon aus, dass es in verschiedenen Schachprogrammen weitere Heuristiken gibt, von denen sich auf die eine oder andere Weise Querbezüge zum 3-Züge-Gesetz oder zu anderen k-Züge-Heuristiken ableiten lassen. Über Rückmeldungen von Schachprogrammierern hierzu würde ich mich freuen.

5. Cordels 3-Züge-Gesetz gilt beim NIM-Spiel !

C.L. Bouton (1869-1922), der 1898 in Leipzig bei Sophus Lie promoviert hatte und später Mathematik-Professor in Harvard wurde, gelang eine vollständige Analyse des klassischen NIM-Spiels [Bou 1902].

Beim NIM-Spiel gibt es zwei Spieler, die abwechselnd ziehen.
Auf dem Tisch liegen mehrere Haufen mit Streichhölzern. Wer am Zug ist, darf von einem beliebigen Haufen beliebig viele Hölzer entfernen (auch einen ganzen Haufen). Er muss aber mindestens ein Holz nehmen.
Gewinner ist, wer am Ende das letzte oder die letzten Hölzer nimmt.
Wenn man einige Male NIM spielt, merkt man bald, dass das Spiel bei nur noch zwei Haufen einfach ist. Sind auf dem ersten Haufen mehr Hölzer als auf dem zweiten, gibt es eine leicht zu merkende Siegstrategie: man nimmt vom ersten Haufen so viele, dass beide Haufen gleich gross sind. Dann kann sich der Gegner abstrampeln, wie er will, man kann im Antwortzug immer wieder erreichen, dass beide Haufen genau gleich gross sind. Am Ende erreicht man eben auch, dass auf beiden Haufen null Hölzer sind, was ja den Sieg bedeutet.

Bouton erkannte und hat auch bewiesen, wie man bei mehr als zwei Haufen den Sieg erzwingen kann: Man schreibt die Anzahlen der Hölzer in den einzelnen Haufen als Zahlen im Binärsystem, also nur mit Einsen und Nullen
(0=0, 1=1, 2=10, 3=11, 4=100, 5=101, ...).
Diese Binärzahlen addiert man, wobei man, und das war die geniale Beobachtung von Bouton, die Überträge absichtlich weglässt. Kommt bei dieser "Nim-Addition" als Ergebnis 0 heraus, ist die Stellung für den Spieler, der dran ist, auch bei bestem Spiel verloren. Kommt aber ein Ergebnis ungleich null heraus, kann der am Zug befindliche Spieler von mindestens einem Haufen gerade so viele Hölze nehmen, dass im Ergebnis die Nim-Summe der Binärzahlen gleich 0 ist.

Beispiel 1: 4 Haufen mit 7, 9, 12, 14 Hölzern
```
 7=  111
 9= 1001
12= 1100
14= 1110
--------
Su*=1100
```

Siegzüge sind:
9 -> 5
12 -> 0
14 -> 2
halt genau soviele, wie es Einsen in der führenden Position mit ungerader 1-Anzahl gibt. Es gibt also drei verschiedene Gewinnzüge.

Beipsiel 2: 3 Haufen mit 6, 3, 2 Hölzern

```
6= 110
3=  11
2=  10
------
S'=111
```

Einziger Siegzug ist also:
6 -> 1

Allgemein: Es gibt beim Nim-Spiel (mit beliebig vielen Haufen), wenn es eine Gewinn-Stellung ist, immer eine ungerade Anzahl von Gewinnzügen.

Vielleicht war das im Jahr 1902 publizierte Ergebnis von Bouton ja irgendwie in der Schachszene bekannt. Allerdings hatte Bouton selbst nicht auf das „Phänomen" der ungerade vielen Siegzüge hingewiesen. Wahrscheinlich war es ihm auch gar nicht als eigenständiges Phänomen in den Sinn gekommen.

Offene Frage: Wer in Schachkreisen kannte wann Boutons Ergebnis?

6. Zu den möglichen Rollen von Tarrasch und Zermelo bei der Entstehung des 3-Züge-Gesetzes

Siegbert Tarrasch (1862-1934) war nicht nur ein sehr starker Schachmeister, sondern auch ein begnadeter Schreiber. Er konnte Dinge wirklich auf den Punkt bringen und scheute auch einen plakativen Stil nicht. Berühmt geworden sind seine Faustregeln, ganz besonders die für Turm-Endspiele: "Der Turm gehört hinter den Freibauern, egal ob es der eigene oder einer der Gegners ist." (Als irgendwann spitzfindige Geister Stellungen beschrieben, bei denen der Turm aus offensichtlichen Gründen nicht hinter den Freibauern gezogen werden sollte, relativierte Tarrasch seine Regel ganz pragmatisch: "Der Turm gehört hinter der Freibauern, außer wenn es nicht gut ist.")

Tarrasch wird die Aussage zugeschrieben, dass es in jeder Stellung einen eindeutig besten Zug gebe (den man finden müsse). Ob Tarraasch das aber jemals so behauptet oder vorsichtiger nur von „oft" sprach, habe ich bisher nicht ermitteln können. Jedenfalls kann man Cordels 3-Züge-Gesetz als Verfeinerung der Aussage von Tarrasch ansehen. Zu klären wäre auch, ob und wann Cordel von Tarrasch's Regel wusste und ob sie seine Formulierung des 3-Züge-Gesetzes beeinflusst hat.

Interessant erscheint mir, dass auch im Jahr 1913 der grundlegende Artikel [Zer 1913] des Mathematikers Ernst Zermelo erschien, in dem erstmals klar definiert wurde, was beim Schachspiel formal unter einem besten Zug zu verstehen ist. Ob Cordel wohl von dieser Arbeit Zermelos wusste? Oder ob Zermelo durch die Aussagen von Tarrasch zum „besten Zug" beeinflusst war?

7. Numerologisches ausserhalb des Schachspiels

Schon lange vor Cordel haben Menschen und insbesondere auch Wissenschaftler versucht, Phänomene der Welt durch schöne Zahlengesetze zu erklären. Hier sind exemplarisch drei Beispiele genannt.

Ein toller Erfolg: Johann Jakob Balmer (1825-1898) war ein Schweizer Mathematiker und Physiker. Aus 4 (in Worten „vier"!) Beobachtungsdaten von Angström für Spektrallinien des gasförmigen Wasserstoffs leitete er eine einfache allgemeine Formel (die „Balmer-Serie") für alle Spektrallinien des Wasserstoffs her [Bal 1885]. Über eine Verallgemeinerung von Rydberg führte dies im Jahr 1913 schließlich zum Schalenmodell von Niels Bohr für den Atomaufbau.

Voll daneben: Das „Quinarische System" [Qui 2009] hatte ein kurze Blütezeit in der Biologie um die Mitte des 19. Jahrhunderts, und zwar fast ausschliesslich im angelsächsischen Raum. Es behauptete, dass alle Familien von Lebewesen jeweils in fünf Unterfamilien aufteilbar waren. Und wenn in irgendeiner Aufteilung erst vier Unterfamilien bekannt waren, dann war nach Meinung der „Quinarier" eine fünfte Untergruppe nur noch nicht gefunden. Das System verlor seine Popularität, als sich nach und nach herausstellte, dass es nicht richtig sein konnte.

Unklare Bedeutung: Der Astronom und Physiker Johann Daniel Titius bemerkte 1766, dass die Abstände der damals bekannten Planeten (Merkur, Venus, Erde, Jupiter, Saturn) zur Sonne grob einem Exponentialgesetz genügen. Wegen seiner verworrenen Formulierung der Beobachtung wurde sie erst populär, als sie der Astronom Johann Elert Bode 1772 in klares Deutsch umschrieb und neu veröffentlichte. Seitdem heißt diese Abstandsreihe „Titius-Bode-Reihe" [TB 2009]. Der Glaube an die Titius-Bode-Reihe half, sowohl den Asteroiden Ceres (in der Lücke zwischen Mars und Jupiter) als auch den Planeten Uranus zu entdecken. Bis heute ist aber nicht klar, ob die Reihe nur Zufall ist oder wirklich auf einem typischen Phänomen bei der Entstehung von Planetensystemen beruht. Ich selbst habe eine eigene Spekulation formuliert und darin die Titius-Bode-Reihe in Bezug zu einer möglichen „gerichteten Panspermie" gesetzt [Alt 2007].

Unbedingt lesenswert ist ein Artikel des holländischen Astronomen Cornelis de Jager, der in einer Parodie auf die Numerologie aus den Maßen eines holländischen Damenfahrrads allerlei Konstanten aus der Physik und Astronomie errechnete [Jag 1993].

8. Diskussion und offene Fragen

Meiner Meinung nach sind die beiden folgenden Aussagen richtig.

(i) **Relativ selten** liegen in einer Schach-Stellung genau zwei beste Züge vor.

(ii) Der **durchschnittliche Abstand** zwischen bestem und zweitbestem Zug in einer Stellung ist größer als der zwischen zweitbestem und drittbestem Zug.

Akzeptiert man diese Aussagen, stellt sich die Frage, in welchen Abschnitten der Schachpartie (Eröffnung, Mittelspiel, Enspiel) sie mit welcher Deutlichkeit gelten. Cordel jedenfalls dürfte sie hauptsächlich (oder gar ausschliesslich) bei seinen Eröffnungs-Analysen bemerkt haben.

Neben der Deutlichkeit der Gültigkeit stellt sich auch die Frage, für welche Partieabschnitte man die „relative Cordel-Regel" praktisch wie gut nachprüfen kann. Elektronische Partiesammlungen wie die von ChessBase dürften dabei von grosser Hilfe sein.

Schach-GM Dr. Karsten Müller antwortete in einer Email, nachdem ich ihm von Cordels 3-Züge-Gesetz geschrieben hatte:

> "Mir scheint Cordels Gesetz (‚Faustregel' trifft es wohl eher) intuitiv plausibel. Ich habe häufig das Gefühl, dass es einen besten Zug gibt (kritische Stellung; man sollte Zeit investieren und ihn finden) oder wenn nicht, dass es dann nicht so ganz genau drauf ankommt (man sollte sich möglichst schneller entscheiden)."

Gefragt wurde ich von einigen Email-Partnern, ob ich mich wegen des 3-Hirn-Prinzips [Alt 1998] für das 3-Züge-Gesetz von Cordel interessiert hätte. Das war aber definitiv nicht der Fall. Es gab beim 3-Hirn-Ansatz in den 1980er und 1990er Jahren auch einen ganz anderen Grund, warum ich als menschlicher Koordinator nur die Vorschläge von zwei verschiedenen Schachcomputern nahm und nicht von drei oder noch mehr Geräten: ich wollte mich einfach nicht mit der Bedienung von zu vielen Apparaten überfordern. Dabei war es mir ziemlich egal, ob es ausser den angezeigten Zugkandidaten weitere gab.

Fragen zu anderen Spielen: Wie sieht es mit 3-Züge-Gesetzen bei anderen Spielen statt Schach aus? Gibt es auch Spiele, bei denen es sehr häufig zwei fast gleichgute beste Züge gibt? („EinStein würfelt nicht" könnte ein solches Spiel sein, wenn eine Beobachtung von Ingo Schwab [Sch 2008] allgemeiner gilt.) Ist NIM ein totales Ausnahme-Spiel, oder kommt das Phänomen, dass es immer eine ungerade Anzahl von Siegzügen gibt, in ganzen Klassen von Spielen vor? Gelten 3-Züge-Gesetze für gewisse Spiele mit mehr als zwei Spielern?

Cordels 3-Züge-Gesetz läßt sich auch auf Optimierungsprobleme (mit nur einem Entscheider) übertragen. Da lautet dann die Frage, wie häufig es eine eindeutig optimale Lösung gibt, wie häufig genau zwei äqui-optimale und wie häufig mindestens drei äqui-optimale Lösungen. Es gibt jedenfalls in der diskreten Optimierung für gewisse Probleme Theoreme der Art, dass es mindestens drei optimale Lösungen gibt (Beispiel: Anzahl längster einfacher Kreise in gewissen kubischen Graphen).

In den 1980er Jahren wurde von Teilen der Computerschach-Szene sehr intensiv die Frage diskutiert, warum sich beim Minimaxing im Spielbaum Fehler in der Blattbewertung nicht verstärken, sondern abschwächen. Sehr gut erklären konnte das Phänomen der Schach-Programmierer Günter Schrüfer. In [Sch 1986] zeigte er, dass die Häufigkeit von Stellungen mit genau einem besten Zug nicht zu gross sein darf.

Und weil Minimaxing beim Schach funktioniert, gibt es eben nicht zu viele Situationen mit genau einem besten Zug. Dieses Ergebnis ist ein schönes Gegenstück zur relativierten Cordelschen Aussage, dass es nicht zu viele Situationen mit genau zwei besten Zügen gibt.

Vom Mongolen-Herrscher Dschingis Khan hatte ich einmal folgendes gelesen (konnte die Quelle leider nicht mehr orten): er ordnete eine Aktion erst an, wenn drei Gründe dafür sprachen. („Normal gute" Entscheider warten, bis zwei Gründe für eine Tat sprechen.)

Frage an Radio Eriwan: Hat es irgendwie mit Cordels 3-Züge-Gesetz zu tun, dass es bei Olympischen Spielen und anderen Wettkämpfen typischerweise drei Medaillen gibt und nicht zwei?

Grosse Fragen am Schluss: **Hat ein Manuskript von Oskar Cordel für ein Buch zum 3-Züge-Gesetz existiert? Falls ja, existiert es jetzt noch irgendwo?**

Mein Dank geht an ...

Eiko Bleicher für das aufwändige statistische Auswerten der Endspiel-Datenbanken.

Peter Anderberg (für mehrere hilfreiche Archiv-Hinweise und Erklärungen zur geschichtlichen Situation); Stefan Bücker (für einen Scan der Seiten 302/303 aus [Cor 1913]); Chrilly Donninger (für den Hinweis auf das Suchschema von Fruit und Co); Karsten Müller (für kritisches Probelesen und die Erlaubnis, seine Einschätzung zitieren zu dürfen); Henk Smout (für seinen schönen Artikel [Smo 2008, besonders S.45] im Kaissiber und auch für den Hinweis auf das Quinarische System); an eine ganze Reihe von Probelesern mit konstruktiven Rückmeldungen.

Referenzen

[AB 2009] I. Althöfer und E. Bleicher. Endgames statistics on Oskar Cordel's „Three moves law". Technical Report, in preparation.

[Alt 1998] I. Althöfer. 13 Jahre 3-Hirn – Meine Schach-Experimente mit Mensch-Maschinen-Kombinationen. 3-Hirn-Verlag, Lage, 1998.

[Alt 2007] I. Althöfer. „Is Directed Panspermia an Indirect Argument for the Titius-Bode Law? Speculation about a cross-connection between the Theory of Directed Panspermia and the Titius-Bode Law". http://www.althofer.de/directed-panspermia--titius-bode.html

[Bal 1885] Wikipedia-Eintrag zur Balmer-Serie. http://de.wikipedia.org/wiki/Balmer-Serie , abgerufen am 15.04.2009 um 19:44 Uhr.

[Ble 2005++] E. Bleicher. Web-Abfrage der Nalimov Endgame Tablebases. http://www.k4it.de/index.php?topic=egtb , verfügbar seit 2005.

[Bou 1902] C.L. Bouton. Nim, a game with a complete mathematical theory, Annals of Mathematics 3 (1901-02), 35-39.

[Cor 1913] O. Cordel. Theorie und Praxis des Schachspiels, II. Band. Potsdam 1913, A. Stein's Verlagsbuchhandlung.

[Jag 1993] C. de Jager. *Was ist Radosophie?* In „Mein paranormales Fahrrad und andere Anlässe zur Skepsis, entdeckt im ‚Skeptical Inquirer' " [Editor Gero von Randow], Rowohlt-Taschenbuch, 1993.

[Qui 2009] Wikipedia-Eintrag zur Quinarian-Theorie. http://en.wikipedia.org/wiki/Quinarian , abgefragt am 15.04.2009 um 19:22 Uhr.

[Sch 1986] G. Schrüfer. Presence and Absence of Pathology on Game Trees. In "Advances in Computer Chess 4" (Editor D.F. Beal), Pergamon Press, Oxford, 1986, S. 101-112.

[Sch 2008] I. Schwab. Detailanalyse einer Partie „EinStein würfelt nicht". http://www.datendissertationschwab.de/Analyse603036.pdf , 2008.

[Smo 2008] H. Smout. Königsgambit C 39 – Der historische Hintergrund des heutigen Standes der Dinge. Kaissiber 33 (November 2008), S.34-45.

[Tar 1912] S. Tarrasch. Die moderne Schachpartie. Erstauflage 1912.

[TB 2009] Wikipedia-Eintrag zur Titius-Bode-Reihe. http://de.wikipedia.org/wiki/Titius-Bode-Reihe , abgerufen am 15.04.2009, 19:36 Uhr.

[Zer 1913] E. Zermelo. Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians. Band 2, S. 501-504, 1913.